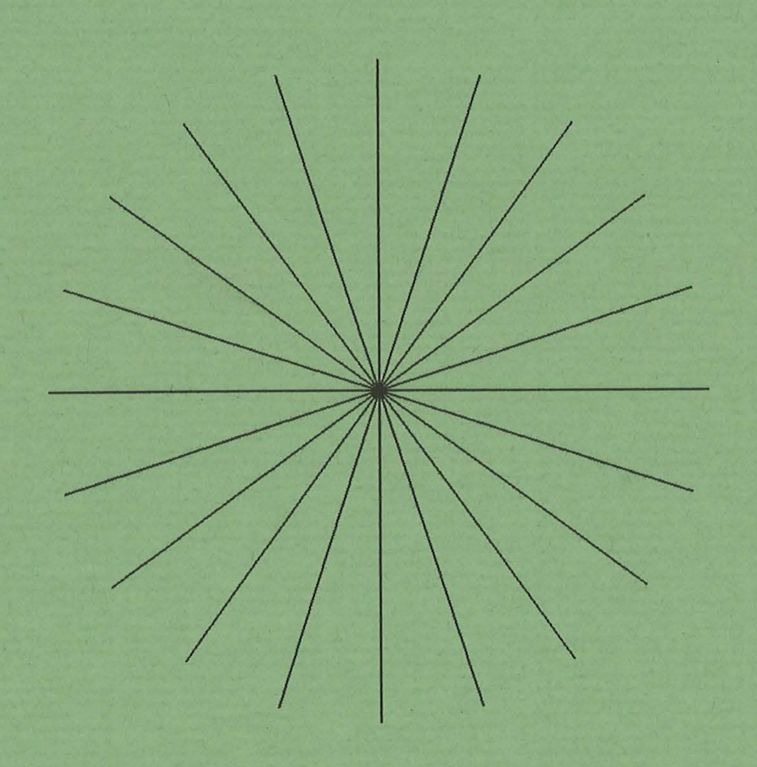
ÁLGEBRA LINEAL (I)
ESPACIOS VECTORIALES

por

SONIA LUISA RUEDA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-78-01

ÁLGEBRA LINEAL (I)
ESPACIOS VECTORIALES

por

SONIA LUISA RUEDA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-78-01

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

3 Área
78 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Álgebra lineal I.
Espacios vectoriales
2009 Sonia Luisa Rueda
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Lucía Alba Fernández
CUADERNO 269.01/ 3-78-01
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-285-7
ISBN-13: 978-84-9728-286-4
Depósito Legal: M-6260-2009

Esta serie de dos cuadernillos:

- Álgebra Lineal I: Espacios Vectoriales
- Álgebra Lineal II: Aplicaciones Lineales

pretende ser una guía de estudio de los conceptos básicos de Álgebra Lineal que se imparten en la asignatura Matemáticas I en la E.T.S.A.M. Han sido utilizados como apuntes de clase durante varios cursos y recogen ejemplos y problemas resueltos, algunos de los cuales han aparecido en las hojas de ejercicios del departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S.A.M. a lo largo de los años. Mi agradecimiento a los alumnos de la asignatura que utilizando estos apuntes me han ayudado a llevarlos hasta su forma actual.

En el primer cuadernillo de esta serie se empieza estableciendo algunos conceptos básicos y parte de la notación que se utilizará en todo el cuadernillo. Se sigue con un repaso de la discusión y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que será aplicado al estudio de los espacios vectoriales, que es el tema central de estos apuntes. Finalizamos con una colección de ejercicios resueltos que amplian el conjunto de ejemplos que se presentan junto con el desarrollo de la materia.

Por limitaciones de espacio no incluimos demostraciones de los resultados que aparecen en este cuadernillo. Recomendamos al lector interesado en dichas demostraciones la lectura de alguno de los libros enumerados en la bibliografía.

Índice

1

Preliminares

1.1 Conjuntos

1.1.1 Notación

Listamos a continuación la notación utilizada para nombrar los conjuntos que aparecen en estos apuntes:

1. $\mathbb{Z}$ conjunto de los números enteros.
2. $\mathbb{Q}$ conjunto de los números racionales.
3. $\mathbb{R}$ conjunto de los números reales.
4. $\mathbb{C}$ conjunto de los números complejos.
5. $\{a, b, c\}$ es el conjunto formado por los elementos a, b, c.
6. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ (m filas y n columnas) y cuyos elementos son números reales.
7. $\mathbb{R}_n[x]$ conjunto de los polinomios en x de grado menor o igual que n con coeficientes reales.

8. $\mathcal{S}_{n\times n}$ conjunto de las matrices simétricas de tamaño $n\times n$ (n filas y n columnas) y cuyos elementos son números reales.

Sea A un conjunto y a un elemento de A, se escribe $a \in A$, es decir a **pertenece** a A. Si a no pertenece a A se escribe $a \notin A$. El **conjunto vacío** es el que no tiene elementos, se denota por $\emptyset$.

Dados dos conjuntos A y B se dice que A es un **subconjunto** de B si todo elemento de A es un elemento de B. También se dice que A está incluido en B y se escribe $A \subset B$. Se escribe $A \subseteq B$ para denotar que A está incluido en B o es igual a B.

Ejemplo 1.1.1. *1.* $A = \{a, b, d\} \subset B = \{a, b, c, d, \{e\}\}$ *y* $\{e\} \in B$.

2. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.1.2 Operaciones con conjuntos

Definición 1.1.2. *Sean A y B conjuntos. Se define:*

1. La **interseción** *de A y B como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos A y B. Se denota por $A \cap B$.*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ y \ x \in B\}.$$

2. La **unión** *de A y B como el conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos A y B. Se denota por $A \cup B$.*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ ó \ x \in B\}.$$

3. La **diferencia** *de A menos B como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se denota por $A - B$.*

$$A - B = \{x \mid x \in A \ y \ x \notin B\}.$$

4. El **producto cartesiano** *de A y B como el conjunto de todos los pares de la forma (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Se denota por $A \times B$.*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Ejemplos 1.1.3. *1. Sea K un conjunto, se define*

$$K^n = K \times \ldots \times K = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in K\}.$$

2. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

3. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Estructuras algebraicas con operaciones internas

Dado un conjunto no vacío A se llama **ley de composición interna** en A a una aplicación $*$ del tipo

$$* : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a, b) \mapsto a * b.$$

Ejemplo 1.2.1. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, si definimos $a * b = \frac{a-b}{2}$ entonces $*$ no es una operación interna en $\mathbb{Z}$, puesto que si $a - b$ no es múltiplo de 2 entonces $a * b \notin \mathbb{Z}$.*

Un conjunto A con operaciones internas $*, \ldots, \circ$ definidas sobre A recibe el nombre de **estructura algebraica** y se denota por $(A, *, \ldots, \circ)$.

Existen distintos tipos de estructuras algebraicas atendiendo a las propiedades que satisfagan las operaciones definidas sobre los elementos de A. Se enumeran a continuación algunas propiedades que pueden verificar las operaciones internas. Sean $*$ y $\circ$ operaciones internas definidas sobre A.

- **Asociativa** de $*$. Para todo $a, b, c \in A$, se verifica $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- **Conmutativa** de $*$. Para todo $a, b \in A$, se verifica $a * b = b * a$.
- **Elemento Neutro** de $*$ es e si $\forall a \in A$ se verifica $a * e = e * a = a$.
- **Elemento Simétrico** de $*$. Si existe el elemento neutro e de $*$. Para todo $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$, a' se llama elemento simétrico de a.
- **Propiedad Distributiva** de $\circ$ con respecto a $*$. Para todo $a, b, c \in A$ se verifica $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

Definición 1.2.2. *Un conjunto G no vacío con operación interna $*$ es un* **grupo** $(G, *)$ *si verifica las propiedades asociativa, elemento neutro y elemento simétrico. Si además verifica la propiedad conmutativa es un* **grupo conmutativo** *(o abeliano).*

Ejemplos 1.2.3. *1. $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo con elemento neutro 0. El simétrico de $n \in \mathbb{Z}$ es $-n$. También son grupos conmutativos $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$.*

2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es un grupo, por ejemplo 2 no tiene simétrico (inverso) ya que $1/2 \notin \mathbb{Z}$. Tampoco es un grupo $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ya que 0 no tiene simétrico (inverso).

Son grupos conmutativos, $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ y $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$.

3. $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ es un grupo conmutativo, siendo $+$ la suma de matrices.

4. $(\mathbb{R}_n[x], +)$ es un grupo conmutativo siendo $+$ la suma de polinomios.

Definición 1.2.4. *Un conjunto K no vacío con operaciones internas $*$ y $\circ$ es un* **cuerpo** $(K, *, \circ)$ *si verifica:*

1. $(K, *)$ es una grupo conmutativo con elemento neutro e.

2. $(K - \{e\}, \circ)$ *es un grupo conmutativo.*

3. La propiedad distributiva de $\circ$ *con respecto a* $*$.

Ejemplo 1.2.5. *Son cuerpos* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *y* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

1.3 Matrices

Sea A una matriz con m filas y n columnas, diremos que A tiene tamaño $m \times n$. También escribiremos $A = (a_{ij})$ con $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diremos que una matriz cuadrada A es **simétrica** si $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Sea A es una matriz cuadrada $n \times n$ (de **orden** n) con $n \geq 2$. Denotamos por $\det(A)$ o $\mid A \mid$ al determinante de A. Sea A_{ij} la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A. Para **calcular el determinante** de A podemos desarrollar utilizando la fila i-ésima de A

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \mid A_{i1} \mid + (-1)^{i+2} a_{i2} \mid A_{i2} \mid + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \mid A_{in} \mid .$$

o la columna j-ésima de A

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \mid A_{1j} \mid + (-1)^{2+j} a_{2j} \mid A_{2j} \mid + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \mid A_{nj} \mid .$$

Sea A es una matriz $m \times n$. El **rango** de A es el orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante no nulo. Se denota por rango(A).

2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Terminología y definiciones básicas

Una **ecuación lineal** en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los **coeficientes** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y el **término independiente** b son números reales.

Ejemplos 2.1.1. *1. Las ecuaciones $5x_1 + x_2 - x_6 = 0$ y $\sqrt{3}x_1 - x_2 = x_3$ son lineales.*

2. Las ecuaciones $x_1^2 - x_2 = 0$ y $\sqrt{x_2} + x_1 = 3$ no son lineales.

Un **sistema de ecuaciones lineales** en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

donde $m \geq 1$, los coeficientes a_{ij} y los términos independientes b_i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ son números reales.

Una **solución** del sistema de ecuaciones lineales (2.1) es una lista $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de números reales que transforma las ecuaciones de (2.1) en identidades al sustituir los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por $s_1, s_2, \ldots, s_n$ respectivamente.

Ejemplo 2.1.2. *La lista* $(5, 5, 3)$ *es una solución del sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7. \end{cases}$$

La **expresión matricial** del sistema (2.1) es $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

siendo A la **matriz de coeficientes,** b la **matriz de términos independientes** y X la **matriz de incógnitas.** La **matriz ampliada** del sistema (2.1) es

$$A \mid b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

El **conjunto de soluciones** del sistema (2.1) es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n \mid AS = b\} \text{ siendo } S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales se llaman **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

2.2 Reducción a forma escalonada

En este apartado se describe una adaptación del algoritmo de Eliminación Gaussiana. Las matrices obtenidas mediante dicho algoritmo se utilizarán en el análisis y discusión de sistemas de ecuaciones lineales (ver sección 2.3).

Definición 2.2.1. *Se dice que una matriz tiene* **forma escalonada** *si verifica:*

1. *Todas las filas no nulas están por encima de las filas nulas.*

2. *El primer elemento no nulo de una fila está a la izquierda del primer elemento no nulo de la fila siguente.*

3. *Todos los elementos de una columna bajo el primer elemento no nulo de una fila son cero.*

Ejemplo 2.2.2. *Las siguientes matrices tienen forma escalonada.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dada una matriz A con m filas, llamamos F_i a la fila i-ésima y **operaciones elementales por filas** a las siguientes operaciones:

1. Intercambiar la fila i por la fila j, que se denota $F_i \leftrightarrow F_j$.

2. Multiplicar la fila i por una constante no nula α, que se denota $F_i \to \alpha F_i$.

3. Reemplazar la fila i por la suma de ella misma con un múltiplo de la fila j, que se denota $F_i \to F_i + \alpha F_j$.

Diremos que la matriz A es **equivalente por filas** a la matriz B si podemos obtener B a partir de A realizando operaciones elementales por filas.

Algoritmo 2.2.3. Eliminación Gaussiana *Dada la matriz A, este algoritmo devuelve una matriz escalonada B equivalente por filas a la matriz A.*

Paso 1 *Nos situamos en la primera columna no nula empezando por la izquierda.*

Paso 2 *Si el primer elemento de dicha columna es nulo intercambiamos la primera fila con otra que tenga ese elemento no nulo.*

Paso 3 *Utilizamos operaciones elementales por filas para conseguir ceros debajo de dicho elemento.*

Paso 4 *Nos movemos a la siguiente fila, si hay alguna. Si es no nula, nos situamos en el primer elemento no nulo de dicha fila y repetimos el paso 3.*

Ejemplo 2.2.4. *Utilizamos el algoritmo anterior para reducir la matriz M a forma escalonada*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 1 *Como la primera columna es no nula, empezamos en dicha columna.*

Paso 2 *Como el primer elemento de la primera columna es 0 realizamos la operación elemental $F_1 \leftrightarrow F_3$,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Paso 3 *Realizamos la operación $F_2 \longrightarrow -F_1 + F_2$.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Paso 4 Realizamos las operaciones $F_2 \leftrightarrow F_3$ *y* $F_3 \rightarrow 2F_2 + F_3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

El resultado es una matriz E *en forma escalonada y equivalente a* M.

Un sistema de ecuaciones lineales es un **sistema con forma escalonada** si su matriz ampliada es una matriz con forma escalonada.

Dado un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada $A \mid b$, un sistema equivalente con forma escalonada tiene por matriz ampliada una matriz escalonada obtenida a partir de $A \mid b$ utilizando el algoritmo 2.2.3.

Ejemplo 2.2.5. *El sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

tiene matriz ampliada la matriz M *del ejemplo 2.2.4 y es equivalente al sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 10x_4 = 7 \end{cases}$$

que tiene matriz ampliada la matriz escalonada E *del ejemplo 2.2.4.*

2.3 Existencia y unicidad de soluciones

Definición 2.3.1. *Dado un sistema de ecuaciones lineales con forma escalonada y fijado un orden en las varibles del sistema, llamamos* **variables libres** *a las variables del sistema que no aparecen en el primer término de ninguna de las ecuaciones del sistema.*

Ejemplo 2.3.2. *Las variables libres del sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

son x_2 *y* x_4.

Si un sistema de ecuaciones lineales con forma escalonada tiene variables libres entonces una **solución paramétrica** del sistema se obtiene expresando todas las variables no libres en función de las variables libres.

Ejemplo 2.3.3. *La solución paramétrica del sistema del ejemplo 2.3.2 es*

$$(x_1, x_2, x_3) = (11 - 4a + 10b, a, 2 + 4b, b), \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

El conjunto de soluciones es

$$\{(11 - 4a + 10b, a, 2 + 4b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Se observa que, en este ejemplo, el sistema tiene infinitas soluciones.

Para discutir la existencia y unicidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada $A \mid b$ y además hallar dichas soluciones, podemos utilizar el siguiente método.

1. Reducimos a forma escalonada la matriz $A \mid b$, llamando E al resultado.

2. Si E tiene una fila de la forma $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c \end{pmatrix}$ con $c \neq 0$ entonces el sistema no tiene solución (es **incompatible**). En otro caso, tiene solución (es **compatible**).

3. Si el sistema es compatible, analizamos si el sistema equivalente con forma escalonada (cuya matriz ampliada es E) tiene variables libres.

   (a) Si tiene variables libres, el sistema tiene infinitas soluciones (**compatible indeterminado**) que se pueden expresar de forma paramétrica.

(b) Si no tiene variables libres entonces la solución es única (**compatible determinado**).

Ejemplos 2.3.4. *1. El sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 7 \end{cases}$$

es equivalente al siguiente sistema con forma escalonada

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

cuya variable libre es x_3. Por lo tanto, es compatible indeterminado y una solución paramétrica es $(x_1, x_2, x_3) = (-3 - a, 2 + 2a, a)$, $a \in \mathbb{R}$. El conjunto de soluciones se puede escribir de la forma

$$\{(-3 - a, 2 + 2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

2. El sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

es equivalente al siguiente sistema con forma escalonada

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ y + 10z = -28 \\ -14z = 42. \end{cases}$$

Como no hay varibles libres la solución es única y se puede obtener por sustitución hacia atrás, $(x, y, z) = (1, 2, -3)$.

3. Si reducimos a forma escalonada la matriz ampliada del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Como la última fila proporciona una ecuación de la forma $0x + 0y + 0z = -3$ *este sistema no tiene solución.*

También podemos utilizar el siguiente resultado para discutir la existencia y unicidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Teorema 2.3.5. Teorema de Rouche *Consideremos un sistema de ecuaciones lineales en* n *incógnitas con forma matricial* $AX = b$. *Entonces, el sistema*

1. *tiene solución* $\Leftrightarrow \text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A)$,

2. *tiene solución única* $\Leftrightarrow \text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) = n$.

Un sistema de ecuaciones lineales con forma matricial $AX = b$ es **homogéneo** si b es una matriz de ceros. Escribiremos $AX = 0$. Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene siempre la solución nula y como consecuencia del Teorema de Rouche tiene una solución no nula (y por tanto infinitas soluciones) si y sólo si $\text{rango}(A \mid b) = \text{rango}(A) < n$.

3

Espacios Vectoriales

3.1 Definición de espacio vectorial

Dados dos conjuntos V y K se llama **ley de composición externa** en V con respecto de operadores en K a una aplicación

$$K \times V \longrightarrow V$$
$$(k, v) \mapsto kv.$$

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y 0 el elemento neutro del grupo $(K, +)$. Se llama **unidad** de K al elemento neutro de $(K - \{0\}, \cdot)$ y se denota por 1_K.

Definición 3.1.1. *Un conjunto no vacío V es un* **espacio vectorial** *sobre el cuerpo K (también K-espacio vectorial) con las operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ interna y $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ externa si se verifica:*

1. *$(V, +)$ es un grupo conmutativo o abeliano. Se llama 0_V a su elemento neutro.*

2. *$\forall u, v \in V$, $\forall a, b \in K$*

   (a) $a(u + v) = au + av$

   (b) $(a + b)u = au + bu$

(c) $(ab)u = a(bu)$

(d) $1_K u = u$.

Se escribe $(V, K, +, \cdot)$ *o simplemente* (V, K). *Los elementos de un espacio vectorial* V *se llaman* **vectores** *y los elementos del cuerpo* K **escalares**.

Ejemplos 3.1.2.

1. *Un cuerpo* K *es espacio vectorial sobre sí mismo. El conjunto* $\{0\}$ *es un espacio vectorial sobre* K.

2. $K^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in K, i = 1, \ldots n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *es un espacio vectorial sobre el cuerpo* K *con las operaciones:*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

con $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^n$ *y* $\alpha \in K$, *es decir, tenemos el espacio vectorial* $(K^n, K, +, \cdot)$. *En particular,* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial.*

3. *Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con coeficientes reales*

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

en n *incógnitas. El conjunto de soluciones del sistema* $(*)$*:*

$$W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n | (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ es solución de } (*)\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

es un espacio vectorial $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

4. $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ *(véase 1.1.1) es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con la suma de matrices y el producto de matrices por escalares,* $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

5. $\mathbb{R}_n[x]$ *(véase 1.1.1) es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con la suma de polinomios y el producto de polinomios por escalares,* $(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$.

3.2 Subespacios vectoriales

Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial.

Definición 3.2.1. *Un subconjunto no vacío U de V es un* **subespacio** *vectorial de V si $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall u, v \in U$ se verifica que:*

$$\alpha u + \beta v \in U.$$

Equivalentemente, un subconjunto no vacío U de V es un subespacio vectorial de V si se verifica que:

1. *$\forall u, v \in U$, $u + v \in U$, es decir $+$ es operación interna sobre U,*
2. *$\forall u \in U$, $\forall \alpha \in K$, $\alpha u \in U$, es decir $\cdot$ es operación externa sobre U.*

Por tanto, U es subespacio vectorial si es un K-espacio vectorial con las operaciones de V.

Ejemplos 3.2.2.

1. *Dado un espacio vectorial V, entonces los conjuntos $\{0_V\}$ y V son subespacios vectoriales de V.*
2. *$V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
3. *El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en n incógnitas con coeficientes reales es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*
4. *Dado un vector no nulo u de un K-espacio vectorial V, el conjunto*

$$U = \{au \mid a \in K\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Definición 3.2.3. *Se dice que un vector $u \in V$ es* **combinación lineal** *de los vectores $u_1, \ldots, u_n \in V$ si existen escalares $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que*

$$u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i.$$

Proposición 3.2.4. *La intersección de dos subespacios vectoriales* U_1 *y* U_2 *de* V *(véase 1.1.2) es un subespacio vectorial* $U_1 \cap U_2$ *de* V.

Proposición 3.2.5. *Sea* C *un conjunto no vacío de* V. *Entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles con elementos de* C,

$$\langle C \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \mid a_i \in K, u_i \in C\}$$

es un subespacio vectorial de V *que recibe el nombre de* **subespacio engendrado por** C.

Ejemplo 3.2.6. *Sea* $C = \{(1,0,0),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. *Entonces*

$$\langle C \rangle = \{(a,b,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Observaciones 3.2.7.

1. $C \subseteq \langle C \rangle$.

2. *Todo subespacio* W *tal que* $C \subseteq W$ *verifica* $\langle C \rangle \subseteq W$.

3. *El subespacio* $\langle C \rangle$ *coincide con la intersección de todos los subespacios que contienen a* C.

Definición 3.2.8. *Se dice que un* K*-espacio vectorial* V *es* **finitamente generado** *si existe un conjunto finito de vectores* G *tal que* $V = \langle G \rangle$, *diremos que el conjunto* G *es un* **sistema generador** *de* V.

Ejemplo 3.2.9. *Sea* $V = \mathbb{R}^3$.

1. $G_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *es un sistema generador de* $\mathbb{R}^3$, *ya que cualquier vector de* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *se puede escribir como*

$$(x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1).$$

2. *Comprobemos que* $G_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ *es un sistema generador de* $\mathbb{R}^3$. *Dado* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *nos preguntamos si existen* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0)$$

equivalentemente si el siguiente sistema en las variables λ_1, λ_2 *y* λ_3 *tiene solución*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \\ \lambda_1 = x_3. \end{cases}$$

Como la matriz de coeficientes tiene rango 3, el Teorema de Rouche (véase 2.3.5) nos permite afirmar que para cualquier $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *el sistema es compatible determinado.*

3. *Comprobemos que* $G_3 = \{(1,1,1),(2,1,1),(0,0,1),(3,0,0)\}$ *también es un sistema generador de* $\mathbb{R}^3$. *Dado* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *nos preguntamos si existen* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,1,1) + \lambda_3(0,0,1) + \lambda_4(3,0,0)$$

equivalentemente si el siguiente sistema en las variables λ_1, λ_2, λ_3 *y* λ_4 *tiene solución*

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = x_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_3. \end{cases}$$

Como la matriz de coeficientes tiene rango 3, el Teorema de Rouche (véase 2.3.5) nos permite afirmar que para cualquier $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *el sistema es compatible indeterminado.*

4. $G_4 = \{(1,1,-3),(0,0,1)\}$ *no es sistema generador de* $\mathbb{R}^3$. *Ya que el sistema*

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_2 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 = x_3 \end{cases}$$

no es compatible para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. *Por ejemplo, para* $(x_1, x_2, x_3) = (0,1,0)$ *el sistema es incompatible.*

Observación 3.2.10. *En el ejemplo anterior se observa que* $\mathbb{R}^3$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial finitamente generado, y que el conjunto generador no es único. La pregunta natural es, ¿cuántos vectores se necesitan para generar* $\mathbb{R}^3$*?*

3.3 Bases y dimensión

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Definición 3.3.1. *Sea* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *un conjunto de* n *vectores de* V. *Se dice que* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es un* **conjunto linealmente independiente** *(o que los vectores* $u_1, \ldots, u_n$ *son linealmente independientes) si la única combinación lineal de dichos vectores que es* 0_V *es la que tiene todos los escalares nulos; esto es, dados* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$

$$\text{si } \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

En otro caso, se dice que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es un conjunto* **linealmente dependiente**, *o que los vectores* $u_1, \ldots, u_n$ *son linealmente dependientes, es decir*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \text{ no todos nulos tales que } \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_V.$$

Ejemplos 3.3.2. *1. Probemos que* $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,-3,0)$, $u_3 = (0,0,5)$ *son linealmente independientes en* $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. *En efecto, si* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_2 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ *entonces* $(\lambda_1, -3\lambda_2, 5\lambda_3) = (0,0,0)$ *y así* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2. $\{(1,2,0),(2,0,0),(0,1,0),(0,0,6)\}$ *es un conjunto linealmente dependiente ya que* $(1,2,0)+(1/2)(2,0,0)+2(0,1,0)+0(0,0,6)=(0,0,0)$.

Observaciones 3.3.3. *Sea C un conjunto de vectores de V.*

1. Si 0_V es un elemento de C, entonces C es un conjunto linealmente dependiente.

2. $C=\{u\}$, $u\neq 0_V$ es un conjunto linealmente independiente.

$C=\{u,v\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow u=\alpha v$, con $\alpha\in K$.

3. Si $C=\{u_1,\dots,u_n\}$ es linealmente dependiente. Dado $u\in V$ cualesquiera entonces $C\cup\{u\}$ es también linealmente dependiente.

4. Si $C=\{u_1,\dots,u_n\}$ es linealmente independiente. Entonces $C-\{u_i\}$ es linealmente independiente para cualquier $i\in\{1,\dots,n\}$.

Definición 3.3.4. *Dos conjuntos de vectores de V, C_1 y C_2 son* **equivalentes** *si* $\langle C_1\rangle=\langle C_2\rangle$.

Proposición 3.3.5. *Todo conjunto de vectores de V es equivalente al conjunto obtenido al añadirle un vector de V combinación lineal de los vectores del conjunto.*

A continuación enumeramos algunas propiedades de la dependencia y la independencia lineal.

Proposición 3.3.6. *Se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. $\{u_1,\dots,u_n\}\subset V$ es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si alguno de sus vectores se puede poner como combinación lineal de los demás.

2. Dos subconjuntos C y T de V son equivalentes si y sólo si todo vector de C depende linealmente de los vectores de T y recíprocamente.

3. Si $w\in V$ depende linealmente de $v_1,\dots,v_n\in V$ y estos dependen a su vez de otros vectores $u_1,\dots,u_m\in V$ entonces w depende linealmente de $u_1,\dots,u_m$.

4. *Si* $C \subset V$ *es un conjunto de vectores linealmente independiente y* $v \in V$ *es un vector que no es combinación lineal de los vectores de* C*, entonces* $C \cup \{v\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Teorema 3.3.7. Teorema fundamental de la independencia lineal *Sea* V *un* K*-espacio vectorial engendrado por* $G = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. *Si* $I = \{u_1, \dots, u_m\}$ *es un conjunto linealmente independiente de vectores de* V *entonces* $m \leq n$.

Definición 3.3.8. *Sea* V *un* K*-espacio vectorial finitamente generado. Se dice que un conjunto de vectores* $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *de* V *es una* **base** *de* V *si verifica,*

1. B *es sistema generador de* V,

2. B *es linealmente independiente.*

Ejemplos 3.3.9.

1. *Sea* e_i *el vector de* $\mathbb{R}^n$ *cuyos elementos son todos cero excepto el i-ésimo que vale 1. Entonces* $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$ *que llamaremos* **base canónica**.

2. *Sea* E_{ij} *la matriz* $m \times n$ *que tiene todos sus elementos nulos excepto el elemento* ij *que vale 1.*

$$B = \{E_{ij} | i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$$

es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y se llama* **base canónica** *de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. *La* **base canónica** *de* $\mathbb{R}_n[x]$ *es* $B = \{1, x, \dots, x^{n-1}, x^n\}$.

Teorema 3.3.10. Teorema de existencia de base *Cualquier sistema generador de un espacio vectorial finitamente generado,* $V \neq \{0_V\}$ *incluye una base de* V. *En consecuencia, todo espacio vectorial* $V \neq \{0_V\}$ *finitamente generado tiene alguna base.*

Ejemplo 3.3.11. *En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ el conjunto*

$$G = \{(1,0), (1,1), (-1,0), (1,2)\}$$

es un sistema generador de V y contiene a la base $B = \{(1,0), (1,1)\}$ de V que se obtiene eliminando vectores que son linealmente dependientes, en este caso $(-1,0) = (-1)(1,0)$ y $(1,2) = 2(1,1) - (1,0)$.

Proposición 3.3.12. *Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, todo vector de V se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de B.*

Definición 3.3.13. *Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Las* **coordenadas** *de un vector $v \in V$ son los escalares de la n-upla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ de forma única. Escribiremos $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_B$ para decir que son coordenadas de un vector en la base B.*

Ejemplos 3.3.14.

1. *En $V = \mathbb{R}^3$ consideramos la base $B = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,2,0), v_3 = (0,0,-1)\}$. Las coordenadas del vector $v = (2,1,1)$ en la base B son $(2, 1/2, -1/2)_B$ ya que $v = 2v_1 + 1/2 v_2 - 1/2 v_3$.*

2. *Las coordenadas de $p(x) = 3 - x + x^3 - 5x^4$ en la base canónica $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$ son $(3, -1, 0, 1, -5)_B$.*

Observaciones 3.3.15.

1. *Obsérvese que un espacio vectorial tiene infinitas bases.*

2. *Si V es un espacio vectorial finitamente generado entonces toda base de V tiene un número finito de vectores.*

3. *El conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todos los polinomios en x con coeficientes reales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que no es finitamente generado. Una base de $\mathbb{R}[x]$ tiene infinitos vectores.*

Teorema 3.3.16. Teorema de la dimensión *Todas las bases de un espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ finitamente generado tienen igual número de vectores.*

Definición 3.3.17. *Se llama* **dimensión** *de un espacio vectorial V finitamente generado, al número de elementos de una base de V y se denota por* $\dim V$. *Se conviene en que* $\dim\{0_V\} = 0$.

Observaciones 3.3.18. *Sea $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores de un K-espacio vectorial finitamente generado V.*

1. *Si C es sistema generador de V, entonces $n \geq \dim V$.*

2. *Si C es linealmente independiente, entonces $n \leq \dim V$.*

3. *Si C es sistema generador de V y $\dim V = n$, entonces C es una base de V.*

4. *Si C es linealmente independiente y $\dim V = n$, entonces C es una base de V.*

5. $\dim V$ *es el número máximo de elementos de un conjunto de vectores de V linealmente independiente.*

6. $\dim V$ *es el número mínimo de elementos de un sistema generador de V.*

Teorema 3.3.19. Teorema de prolongación de base *Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado. Todo conjunto linealmente independiente de vectores de V puede completarse hasta obtener una base de V.*

Ejemplo 3.3.20. *Consideremos $V = \mathbb{R}^3$. El conjunto de vectores linealmente independientes $I = \{(1,1,0),(0,2,0)\}$ se prolonga para obtener la base*

$$\{(1,1,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ añadiendo el vector $(0,0,1)$.

Definición 3.3.21. *El* **rango de un conjunto de vectores** $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *de* V *es la dimensión del subespacio que engendran:*

$$\text{rango}(C) = \dim\langle C\rangle.$$

En un K-espacio vectorial V de dimensión finita, fijamos una base B. Sea M la matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores de C en la base B. Entonces,

$$\text{rango}(C) = \text{rango}(M).$$

Proposición 3.3.22. *El rango de una matriz es el mayor número de vectores fila linealmente independientes que posee (o equivalentemente de vectores columna).*

3.4 Ecuaciones de un subespacio

Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado con $\dim V = n$ y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Dado un subespacio U de V distinto de V y de $\{0_V\}$, explicamos a continuación como obtener sus ecuaciones cartesianas y paramétricas en la base B.

3.4.1 Ecuaciones cartesianas

Proposición 3.4.1. *Existe un sistema de ecuaciones lineales homogéneo* $AX = 0$ *con* $\dim V - \dim U$ *ecuaciones cuyo conjunto de soluciones es igual al conjunto de*

coordenadas de todos los vectores de U *en la base* B*, esto es*

$$\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in U\} =$$

$$= \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n \mid AS = 0\} \text{ siendo } S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Todo sistema de ecuaciones lineales que verifique lo anterior recibe el nombre de **sistema de ecuaciones cartesinas** *de* U *en la base* B.

Supongamos que la dim$U = m$ (con $0 < m < n$) y sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U. Buscar las ecuaciones cartesianas de U significa buscar las condiciones que deben verificar las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ de un vector v en la base B para que v pertenezca a U.

Supongamos que las coordenadas de u_i en la base B son $(u_{i1}, \ldots, u_{in})_B$. Se construye la siguiente matriz M de tamaño $(m+1) \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}.$$

Para que el vector v pertenezca a U tiene que ser combinación lineal de los vectores $\{u_1, \ldots, u_m\}$ y por tanto rango$(M) = m$. Esto significa que todos los menores de order $m+1$ de M tienen que ser nulos. Cada menor de orden $m+1$ proporciona una ecuación lineal homogénea pero como dim$U = m$ podemos reducir el sistema a

$l = n - m$ ecuaciones lineales

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } U \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n = 0, \end{cases}$$

tomando l menores de orden $m + 1$ que contengan a un menor de orden m no nulo prefijado.

Obsérvese que las ecuaciones cartesianas del subespacio U en la base B no son únicas.

Ejemplos 3.4.2. *Se fija en $V = \mathbb{R}^4$ la base canónica. Se consideran los vectores $u_1 = (1, 2, 1, 0)$,$u_2 = (3, 5, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 5, 6)$.*

1. *Sea $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Como u_1,u_2 y u_3 son linealmente independientes* $\dim U = 3$. *El número de ecuaciones cartesianas de U es* $\dim V - \dim U = 4 - 3 = 1$. *Dicha ecuación es $-27x_1 + 16x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0$ y se obtiene calculando el determinante de la matriz*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. *Sea $W = \langle u_1, u_3 \rangle$. Se tiene que* $\dim W = 2$ *y el número de ecuaciones cartesianas es* $\dim V - \dim W = 2$. *Dichas ecuaciones se obtienen calculando 2 menores de orden 3 de la matriz*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

que contengan a un menor de orden 2 no nulo fijado. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ las ecuaciones son } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir

$$\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

3.4.2 Ecuaciones paramétricas

Definición 3.4.3. *Las* **ecuaciones paramétricas** *de U en la base B son una solución paramétrica de un sistema de ecuaciones cartesianas de U en la base B.*

Si dim$U = m$ las ecuaciones paramétricas son

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } U \begin{cases} x_1 = u_{11}\alpha_1 + u_{21}\alpha_2 + \cdots + u_{m1}\alpha_m \\ x_2 = u_{12}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + \cdots + u_{m2}\alpha_m \\ \vdots \\ x_n = u_{1n}\alpha_1 + u_{2n}\alpha_2 + \cdots + u_{mn}\alpha_m. \end{cases}$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ los parámetros y $u_{ij} \in K$. También se escriben de la forma

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= (u_{11}\alpha_1 + u_{21}\alpha_2 + \cdots + u_{m1}\alpha_m, \ \ldots, \ u_{1n}\alpha_1 + u_{2n}\alpha_2 + \cdots + u_{mn}\alpha_m).$$

Esto significa que un vector $v \in V$ de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ pertenece a U si

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B =$$
$$= (u_{11}\alpha_1 + u_{21}\alpha_2 + \cdots + u_{m1}\alpha_m, \ \ldots, \ u_{1n}\alpha_1 + u_{2n}\alpha_2 + \cdots + u_{mn}\alpha_m)_B =$$
$$= \alpha_1(u_{11}, \ldots, u_{1n})_B + \alpha_2(u_{21}, \ldots, u_{2n})_B \ldots + \alpha_m(u_{m1}, \ldots, u_{mn})_B$$

y si llamamos u_i al vector de coordenadas $(u_{i1}, \dots, u_{in})_B$, $i = 1, \dots, m$ tenemos que $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ es una base de U.

Ejemplo 3.4.4. *Se fija en $V = \mathbb{R}^4$ la base canónica. Sea T el subespacio de V de ecuaciones cartesianas*

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } T \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_4 - 7x_1 = 0. \end{cases}$$

Se resuelve el sistema para obtener las ecuaciones paramétricas

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } T \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_2 \\ x_4 = 7\alpha_1. \end{cases}$$

Se descomponen las ecuaciones paramétricas

$$(\alpha_1, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2, 7\alpha_1) = \alpha_1(1, 2, 0, 7) + \alpha_2(0, 3, 1, 0)$$

para obtener una base $\{u_1 = (1, 2, 0, 7), u_2 = (0, 3, 1, 0)\}$ de T.

3.5 Operaciones con subespacios

Sea V un espacio vectorial sobre K con base B.

3.5.1 Intersección de subespacios

La intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial (véase la proposición 3.2.4). Se explica a continuación como obtener sus ecuaciones.

Sean U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V con sistemas de ecuaciones cartesianas

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } U_1 \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{l_1 1}x_1 + a_{l_1 2}x_2 + \cdots + a_{l_1 n}x_n = 0, \end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } U_2 \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{l_2 1}x_1 + b_{l_2 2}x_2 + \cdots + b_{l_2 n}x_n = 0, \end{cases}$$

es decir, U_1 tiene l_1 ecuaciones y U_2 tiene l_2.

El subespacio intersección $U_1 \cap U_2$ está formado por aquellos vectores de V cuyas coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$ verifican el sistema de ecuaciones

$$(*) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{l_1 1}x_1 + a_{l_1 2}x_2 + \cdots + a_{l_1 n}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{l_2 1}x_1 + b_{l_2 2}x_2 + \cdots + b_{l_2 n}x_n = 0, \end{cases}$$

Observaciones 3.5.1. *1. El sistema de ecuaciones cartesianas de $U_1 \cap U_2$ se obtiene eliminando de $(*)$ las ecuaciones que dependan linealmente de las demás. Esto puede conseguirse reduciendo $(*)$ a forma escalonada. Por tanto, el número de ecuaciones cartesianas de $U_1 \cap U_2$ es $\leq l_1 + l_2$.*

2. Una solución paramétrica de $(*)$ proporciona las ecuaciones paramétricas de $U_1 \cap U_2$ y de ellas se obtiene una base de $U_1 \cap U_2$.

Ejemplo 3.5.2. *En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, fijada la base canónica, se consideran los subespacios U_1 de ecuación cartesiana $5x_2 - 3x_3 - x_1 = 0$ y U_2 de ecuación cartesiana $-x_3 + x_2 - x_1 = 0$. Como estas ecuaciones no son proporcionales, las ecuaciones cartesianas de $U_1 \cap U_2$ son*

$$\textit{Ecuaciones cartesianas de } U_1 \cap U_2 \begin{cases} 5x_2 - 3x_3 - x_1 = 0 \\ -x_3 + x_2 - x_1 = 0. \end{cases}$$

La solución paramétrica del sistema nos proporciona las

$$\textit{Ecuaciones paramétricas de } U_1 \cap U_2 : (x_1, x_2, x_3) = (-a, a, 2a).$$

Así $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ *y* $\{(-1, 1, 2)\}$ *es una base de* $U_1 \cap U_2$.

3.5.2 Suma de subespacios

Dados U_1, U_2 subespacios de V, en general $U_1 \cup U_2$ no es un subespacio de V. Veamos un contraejemplo.

Ejemplo 3.5.3. *Se toman los subespacios de* $V = \mathbb{R}^2$

$$U_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$$
$$U_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R}\}.$$

El conjunto $U_1 \cup U_2$ *no es subespacio de* $\mathbb{R}^2$ *ya que* $u_1 = (1, 0) \in U_1$, $u_2 = (0, 1) \in U_2$ *pero* $u_1 + u_2 = (1, 1) \notin U_1 \cup U_2$.

Definición 3.5.4. *Sean* U_1 *y* U_2 *subespacios de* V. *Se llama* **suma** *de* U_1 *y* U_2 *al conjunto*

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Proposición 3.5.5. *El conjunto* $U_1 + U_2$ *es un subespacio vectorial de* V, *es el menor subespacio que contiene a* $U_1 \cup U_2$, *es decir* $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$.

Para calcular el subespacio suma $U_1 + U_2$ es importante tener en cuenta que si B_{U_1} es una base de U_1 y B_{U_2} es una base de U_2 entonces

$$U_1 + U_2 = \langle B_{U_1} \cup B_{U_2} \rangle,$$

es decir, $B_{U_1} \cup B_{U_2}$ es un sistema generador de $U_1 + U_2$. Podemos obtener una base $B_{U_1+U_2}$ de $U_1 + U_2$ a partir de $B_{U_1} \cup B_{U_2}$ eliminando vectores hasta obtener un subconjunto linealmente independiente que siga siendo sistema generador.

Ejemplos 3.5.6. 1. *En el ejemplo 3.5.3 el subespacio suma* $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$ *es el menor subespacio que contiene al conjunto* $U_1 \cup U_2$.

2. *En* $V = \mathbb{R}^3$ *se fija la base canónica. Se consideran los subespacios vectoriales* $U_1 = \langle v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,1,0)\rangle$, $U_2 = \langle v_3 = (0,0,1)\rangle$, $U_3 = \langle v_4 = (0,1,1)\rangle$. *Se tiene que,*

   (a) $U_1 + U_2 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ *y que como* $v_3 = (1/2)(v_1 - v_2)$ *una base de* $U_1 + U_2$ *es* $B_{U_1+U_2} = \{v_1, v_2\}$. *Es decir,* $U_1 + U_2 = U_1$ *ya que* $U_2 \subset U_1$.

   (b) $U_1 + U_3 = \langle v_1, v_2, v_4\rangle$ *y como* v_1, v_2, v_4 *son linealmente independientes* $B_{U_1+U_3} = \{v_1, v_2, v_4\}$ *es una base de* $U_1 + U_3$. *Esto significa que* $U_1 + U_3 = \mathbb{R}^3$ *ya que* $\dim(U_1 + U_3) = 3$.

   (c) $U_2 + U_3 = \langle v_3, v_4\rangle$ *y como* v_3, v_4 *son linealmente independienes* $B_{U_2+U_3} = \{v_3, v_4\}$ *es una base. Así,* $\dim(U_2 + U_3) = 2$ *y tiene ecuaciones*

   Ecuaciones paramétricas de $U_2 + U_3 : (x_1, x_2, x_3) = (0, b, a + b)$.

   Ecuación cartesiana de $U_2 + U_3 : x_1 = 0$.

3. *En* $V = \mathbb{R}^4$ *se fija la base canónica. Se consideran los subespacios vectoriales*

$$U = \langle v_1 = (0,0,1,1), v_2 = (1,0,0,0)\rangle,$$

$$W = \langle v_3 = (2,0,1,1), v_4 = (0,0,0,1)\rangle.$$

Del sistema generador $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *de* $U + W$ *se obtiene la base* $B_{U+W} = \{v_1, v_2, v_4\}$ *ya que* $v_3 = v_1 + 2v_2$ *y los restantes son linealmente independientes. La ecuación cartesiana de* $U + W$ *es* $x_2 = 0$.

3.5.3 Suma directa de subespacios

Definición 3.5.7. *Sean* U_1 *y* U_2 *subespacios de* V. *Se dice que* $U_1 + U_2$ *es* **suma directa** *si*

$$U_1 \cap U_2 = \{0_V\}.$$

Se escribe $U_1 \oplus U_2$.

Ejemplos 3.5.8. *1. En el ejemplo 3.5.6, (2) se tiene que* U_2+U_3 *es suma directa,* $U_2 \oplus U_3$. *En efecto, probemos que* $U_2 \cap U_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*: si* $v \in U_2 \cap U_3$ *entonces* $v = \alpha v_3 = \beta v_4$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, como* v_3 *y* v_4 *no son proporcionales se tiene que* $\alpha = \beta = 0$ *y así* $v = 0_{\mathbb{R}^3}$.

2. En $V = \mathbb{R}^3$ *se fija la base canónica. Se consideran los subespacios vectoriales* U *y* W *dados por sus ecuaciones cartesianas,*

$$U \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases} \qquad W \equiv 2x_2 + x_3 = 0.$$

Las coordenadas (x_1, x_2, x_3) *de un vector de* $U \cap W$ *verifican el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes tiene rango 3. El Teorema de Rouche nos permite afirmar que la única solución de dicho sistema es la nula (obsérvese que el sistema es homogéneo). Esto demuestra que $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ *y que por tanto* $U \oplus W$.

Proposición 3.5.9. *Sea* B_1 *una base de* U_1 *y* B_2 *una base de* U_2 *entonces:*

$$U_1 \cap U_2 = \{0_V\} \Leftrightarrow B_1 \cup B_2 \text{ es linalmente independiente,}$$

es decir

$$U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow B_1 \cup B_2 \text{ es una base de } U_1 + U_2.$$

Proposición 3.5.10. *Son equivalentes:*

1. $U_1 + U_2$ *es suma directa.*

2. $u_1 + u_2 = 0_V \Rightarrow u_i = 0_V, i = 1, 2.$

3. *Todo vector de* $U_1 + U_2$ *puede expresarse de forma única como suma de un vector de* U_1 *y otro de* U_2*, esto es*

$$\text{si } u_1 + u_2 = u_1' + u_2', \text{ con } u_i, u_i' \in U_i, i = 1, 2 \Rightarrow u_i = u_i', i = 1, 2.$$

Definición 3.5.11. Suma directa de r subespacios de un espacio vectorial *Sean* $U_1, \ldots, U_r$ *subespacios del* K*-espacio vectorial* V*. Entonces* $U_1 + \ldots + U_r$ *es suma directa si dado* $u \in U_1 + \ldots + U_r$ *existen unos únicos vectores* $u_i \in U_i$*,* $i = 1, \ldots, r$ *tales que* $u = u_1 + \ldots + u_r$*.*

Equivalentemente,

$$U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0_V\}, \ \forall i = 1, \ldots, r.$$

Definición 3.5.12. *Dos subespacios* U_1 *y* U_2 *de un* K*-espacio vectorial* V *son* **complementarios** *(o suplementarios) si* $U_1 \oplus U_2 = V$*.*

$$U_1 \oplus U_2 = V \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 + U_2 = V \\ U_1 \cap U_2 = \{0_V\} \end{cases}$$

Observaciones 3.5.13. 1. *Todo subespacio tiene algún complementario.*

2. *Sean* U_1 *y* U_2 *subespacios complementarios de* V*. Si* B_1 *es una base de* U_1 *y* B_2 *es una base de* U_2 *entonces* $B_1 \cup B_2$ *es una base de* V*.*

Ejemplo 3.5.14. *En* $\mathbb{R}_2[x]$ *se fija la base canónica* $B = \{1, x, x^2\}$*. Dado el subespacio* U *de ecuaciones paramétricas* $(x_1, x_2, x_3) = (a+b, a, b)$ *se calcula a continuación un subespacio complementario de* U*. A partir de las ecuaciones paramétricas, obtenemos la siguiente base* $B_U = \{1+x, 1+x^2\}$ *de* U*. Un subespacio complementario* W *de* U *tiene una base* B_W *tal que* $B_U \cup B_W$ *es una base de* $\mathbb{R}_2[x]$*. Por lo tanto,* $\dim W = 1$ *y podemos tomar* $B_W = \{w\}$ *siendo* w *cualquier vector de* $\mathbb{R}_2[x]$ *linealmente independiente con los de* B_U*. Por ejemplo,* $B_W = \{1\}$ *y* $W = \langle 1 \rangle$*. También son subespacios complementarios de* U*,* $W_1 = \langle x \rangle$ *y* $W_2 = \langle x + x^2 \rangle$*.*

$$U \oplus W = \mathbb{R}_2[x], \ U \oplus W_1 = \mathbb{R}_2[x], \ U \oplus W_2 = \mathbb{R}_2[x].$$

Teorema 3.5.15. Fórmula de las dimensiones o de Grassman *Sean* U_1 *y* U_2 *subespacios de* V. *Entonces*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Ejemplo 3.5.16. *En el ejemplo 3.5.6,(3) se tiene que* $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2$ *y que* $\dim(U_1 + U_2) = 3$ *por lo tanto*

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = 1.$$

4

Ejercicios Resueltos

1. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$.

   (a) $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y = 0\}$

   (b) $B = \{(a, b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

   (c) $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0 \text{ ó } z - 6t = 0\}$

   (d) $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \leq 0\}$

   (e) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x < 0\}$

   Solución

   (a) Comprobamos que es un subespacio utilizando la definición 3.2.1. Sean $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

   $$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha t_1 + \beta t_2)$$

   verifica

   $$5(\alpha x_1 + \beta x_2) + \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(5x_1 + y_1) + \beta(5x_2 + y_2) = 0$$

   ya que $5x_1 + y_1 = 0$ y $5x_2 + y_2 = 0$. Por tanto $\alpha v_1 + \beta v_2 \in A$.

(b) Comprobamos que es un subespacio utilizando la definición 3.2.1. Sean $v_1 = (a_1, b_1, a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2, a_2, b_2) \in B$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2)$$

con $\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2 \in \mathbb{R}$. Por tanto $\alpha v_1 + \beta v_2 \in B$.

(c) El vector $u = (1, 1, 0, 0)$ verifica $z - 6t = 0$ por tanto $u \in C$. El vector $v = (0, 0, 1, 1)$ verifica $2x + y = 0$ y por tanto $v \in C$. Sin embargo $u + v = (1, 1, 1, 1)$ no verifica ninguna de las dos ecuaciones, es decir $u + v \notin C$. Esto demuestra que la suma no es operación interna en C y que por tanto C no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(d) El vector $v = (0, 0, 0, 1) \in D$ pero $-2v = (0, 0, 0, -2) \notin D$ lo que demuestra que el producto por escalares no es operación externa de $\mathbb{R}$ en D y así D no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(e) El vector nulo $(0, 0, 0, 0)$ no pertecene a E por lo tanto en E no existiría elemento neutro para la suma en E. Esto nos permite afirmar que E no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

2. Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$:

(a) $V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}$,

(b) $V_2 = \langle v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4)\rangle$,

(c) $V_3 = \langle w_1 = (1, 1, 0, 1), w_2 = (1, 0, 0, 0), w_3 = (0, 1, 1, 0), w_4 = (0, 0, 0, 1)\rangle$.

¿ Pertenece el vector $v = (1, 0, 1, -2)$ a dichos subespacios? En caso afirmativo calcular las coordenadas de dicho vector con respecto a alguna base de dichos subespacios.

Solución

(a) El vector v pertenece a V_1 ya que verifica la ecuación $x + y - z = 0$ de V_1. Las ecuaciones paramétricas de V_1 son $(x, y, z, t) = (-a + b, a, b, c)$ y una base $B_{V_1} = \{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 0, 1)\}$. Para buscar las coordenadas de v en B_{V_1} resolvemos

$$(1, 0, 1, -2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Por lo tanto las coordenadas de v son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 1, -2)_{B_{V_1}}$.

(b) Los vectores v, v_1, v_2 son linealmente independientes ya que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 3.$$

Por lo tanto v no pertenece a V_2.

(c) Tenemos que $B_{V_3} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es una base de V_3 ya que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Por lo tanto $V_3 = \mathbb{R}^4$ y las coordenadas de v en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ son $(1, 0, 1, -2)$. Para calcular las coordenadas de v en la base B_{V_3} resolvemos $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4$, es decir

$$\begin{cases} 1 = \lambda_2 + \lambda_1 \\ 0 = \lambda_3 + \lambda_1 \\ 1 = \lambda_3 \\ -2 = \lambda_4 + \lambda_1. \end{cases}$$

Las coordenas de v en B_{V_3} son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-1, 2, 1, -1)_{B_{V_3}}$.

3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales.

   (a) ¿Es $B_1 = \{p_1(x) = x^2 - 1, p_2(x) = x^2 + x + 1, p_3(x) = x^2 - x + 1\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$? En caso afirmativo, hállense las coordenadas de $p(x) = 3 - x + 7x^2$ en B_1.

   (b) ¿Es $\{q_1(x) = x + 1, q_2(x) = x^2 + 1\}$ linealmente independiente? En caso afirmativo complétese para obtener una base B_2 de $\mathbb{R}_2[x]$.

   (c) ¿Es $\{s_1(x) = 1 + x + x^2, s_2(x) = 1 + x^2, s_3(x) = 3 + x, s_4(x) = 2 + x - x^2\}$ un sistema generador de $\mathbb{R}_2[x]$? En caso afirmativo obténgase a partir de él una base B_3 de $\mathbb{R}_2[x]$.

Solución

Sea $B = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) El rango de la matriz 3×3 que tiene por filas las coordenadas de los vectores de B_1 en la base B es 3

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Como B_1 es un sistema linealmente independienete y $\dim\mathbb{R}_2[x] = 3$ se tiene que B_1 es una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Resolviento $\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = p(x)$ obtenemos las coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{B_1}$ de $p(x)$, es decir resolviendo

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7. \end{cases}$$

Se tiene que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{B_1} = (2, 2, 3)_{B_1}$.

(b) Los polinomios $q_1(x)$ y $q_2(x)$ son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Completamos $\{q_1(x), q_2(x)\}$ a una base de $\mathbb{R}_2[x]$ añadiendo un polinomio de la base B, por ejemplo $B_2 = \{q_1(x), q_2(x), 1\}$ es base ya que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Obsérvese que podemos añadir cualquier vector que sea linealmente independiente con $q_1(x)$ y $q_2(x)$. Por otra parte, uno de los de la base B debe ser linealmente independiente con $q_1(x)$ y $q_2(x)$ pero existen muchas otras posibilidades.

(c) Las coordenadas de los vectores en la base B son $(1,1,2)_B$, $(1,0,1)_B$, $(3,1,0)_B$, $(2,1,-1)_B$ respectivamente. El rango de la matriz 4×3 que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores es 3 por lo tanto tenemos un sistema generador del que obtenemos la base $B_3 = \{s_1(x), s_2(x), s_3(x)\}$ ya que $\{s_1(x), s_2(x), s_3(x)\}$ es linealmente independiente.

4. Sea B la base canónica de $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. Se consideran los subespacios vectoriales S y T de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones cartesianas en la base B son

$$S\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right. , T\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Hallar una base, la dimensión, las ecuaciones cartesianas y paramétricas de S, T, $S+T$ y $S \cap T$ en la base B.

Solución

Resolviendo el sistema de ecuaciones cartesianas de S obtenemos

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } S : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a+b, a, b, 2a).$$

De aquí se tiene que dim$S = 2$ y una base de S es $B_S = \{v_1 = (1,1,0,2), v_2 = (1,0,1,0)\}$ ya que $(a+b,a,b,2a) = a(1,1,0,2) + b(1,0,1,0)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones cartesianas de T obtenemos

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } T : (x_1,x_2,x_3,x_4) = (a,a,b,2a).$$

De aquí se tiene que dim$T = 2$ y una base de T es $B_T = \{v_1 = (1,1,0,2), v_3 = (0,0,1,0)\}$ ya que $(a+b,a,b,2a) = a(1,1,0,2) + b(0,0,1,0)$.

Se verifica que $S+T =< B_S \cup B_T >=< v_1, v_2, v_3 >$. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es 3, por lo tanto $\dim(S+T) = 3$ y $B_{S+T} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $S+T$. Obtenemos las ecuaciones paramétricas de $S+T$ calculando $av_1 + bv_2 + cv_3$,

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } S+T \equiv (x_1,x_2,x_3,x_4) = (a+b,a,b+c,2a).$$

El número de ecuaciones cartesianas de $S+T$ es $\dim\mathbb{R}^4 - \dim(S+T) = 1$ y la ecuación cartesiana se obtiene calculando el determinante

$$\text{Ecuación cartesiana de } S+T : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x_2 - x_4 = 0.$$

Los vectores de $S \cap T$ verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

que es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones en forma escalonada

$$\text{Ecuaciones cartesianas de } S \cap T \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones cartesianas de $S \cap T$ obtenemos

$$\text{Ecuaciones paramétricas de } S \cap T : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, a, 0, 2a).$$

Se sigue que $\dim(S \cap T) = 1$ y que $B_{S \cap T} = \{(1, 1, 0, 2)\}$.

Observaciones

(a) Sabiendo que $\dim S = 2$, $\dim T = 2$ y que $\dim(S + T) = 3$, la fórmula de las dimensiones nos permite afirmar que

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S + T) = 1.$$

(b) Solución alternativa para obtener $S \cap T$. Un vector (x_1, x_2, x_3, x_4) pertenece a $S \cap T$ si verifica

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = av_1 + bv_2 = cv_1 + dv_3$$
$$(a - c)v_1 + bv_2 - dv_3 = (-c + a + b, -c + a, -d + b, -2c + 2a) = 0_{\mathbb{R}^4},$$

resolviendo

$$\begin{cases} -c + a + b = 0 \\ -c + a = 0 \\ -d + b = 0 \\ -2c + 2a = 0 \end{cases}$$

se tiene que $b = c = d = 0$ y así $(x_1, x_2, x_3, x_4) = av_1$, es decir $S \cap T = \langle v_1 \rangle$.

5. Sea $S_{2\times2}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2. Fijamos la base de $S_{2\times2}$

$$B = \left\{ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinar las ecuaciones cartesianas de un subespacio complementario del subespacio U con base

$$B_U = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución

Las coordenadas de las matrices de B_U en la base B son $(1,1,0)_B$ y $(1,0,1)_B$. La matriz S_1 tiene coordenas $(1,0,0)_B$ y como

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

se tiene que $\{M_1, M_2, S_1\}$ es una base de $S_{2\times2}$. Esto significa que $W_1 = \langle S_1 \rangle$ es subespacio complementario de U.

6. Demostrar la proposición 3.2.4

Solución

Utilizamos la definición de subespacio vectorial. Sean $u, v \in U_1 \cap U_2$ y $\alpha, \beta \in K$. Como $u, v \in U_1$ y U_1 es un subespacio vectorial tenemos que $\alpha u + \beta v \in U_1$. Como $u, v \in U_2$ y U_2 es un subespacio vectorial tenemos que $\alpha u + \beta v \in U_2$. Por lo tanto $\alpha u + \beta v \in U_1 \cap U_2$. Esto demuestra que $U_1 \cap U_2$ es un subespacio vectorial de V.

7. Sea V un K-espacio vectorial con base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Demostrar que las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base B son únicas. Esto demuestra la proposición 3.3.12.

Solución

Supongamos que las coordenadas no son únicas. Es decir que existen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in K^n$ distintas tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Entonces

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n - \mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n = 0_V$$
$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0_V.$$

Como $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes, se tiene que

$$\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$$

y por tanto que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Lo que demuestra que las coordenadas son únicas.

8. Sean U_1 y U_2 subespacios de un K-espacio vectorial V. Sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de U_1 y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de U_2. Demostrar que $U_1 \cap U_2 \neq \{0_V\} \Leftrightarrow B_1 \cup B_2$ es linealmente dependiente. Esto demuestra la proposición 3.5.9.

Solución

Sea $v \neq 0_V$, $v \in U_1 \cap U_2 \Leftrightarrow$ existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ no todos nulos y existen $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ no todos nulos tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n - \mu_1 w_1 - \cdots - \mu_m w_m = 0_V$ con no todos los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nulos ni todos los $\mu_1, \ldots, \mu_m$ nulos $\Leftrightarrow B_1 \cup B_2$ es linealmente dependiente.

Bibliografía

[1] J. de Burgos, *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. McGraw-Hill, 1999.

[2] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra Lineal y Geometría*. Ed. Reverté, 1994.

[3] D.C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 3ª edición. Addison Wesley, 2003.

[4] J.L. Pinilla, *Lecciones de Álgebra Lineal*. Varicop, 1970.

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

269.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

cuadernos.ijh@gmail.com

info@mairea-libros.com

ISBN 978-84-9728-286-4

9 788497 282864 >